CINETIQUE
DES SYSTEMES MATERIELS

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

1 CONSERVATION DE LA MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL EN MECANIQUE CLASSIQUE

1.1 Système matériel de solides

1.1.1 SOLIDE INDEFORMABLE

Comme nous l'avons vu en Cinématique, un solide indéformable S est un ensemble de points tels que la distance de deux quelconques de ces points reste constante au cours du mouvement du solide.

$$\boxed{\forall A \in S, \forall B \in S, \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = c^{ste}}$$

1.1.2 SYSTEME MATERIEL DE SOLIDES $E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$

En Dynamique, nous étudierons principalement le comportement des systèmes matériels de solides modélisables par des mécanismes à chaînes simples ou complexes, ouvertes ou fermées.

Les solides sont considérés comme indéformables. Les liaisons reliant les solides sont considérées comme réelles (éventuellement avec frottement).

1.2 Masse d'un système matériel E

1.2.1 DEFINITION

A toute partie $E_i(t)$ du système matériel E(t), on associe une mesure positive et additive notée $m[E_i(t)]$ telle que :

$$m[E_i(t)] \geq 0$$

$$m[E_i(t) \cup E_j(t)] = m[E_i(t)] + m[E_j(t)] \quad \text{avec} \quad E_i(t) \cap E_j(t) = \varnothing$$

$$m[E(t)] = \int_{E(t)} dm$$

1.2.2 CONSEQUENCE

Soit E(t) un système matériel en mouvement par rapport à un repère R tel que $E(t) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Si $\vec{\varphi}[P(t)]$ est une fonction vectorielle définie pour tout point P de E(t) tel que : $P(t) \to \vec{\varphi}[P(t)]$ alors on démontre que :

$$\boxed{\int_{E(t)} \vec{\varphi}[P(t)]\, dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \vec{\varphi}[P(t)]\, dm \qquad (1)}$$

1.3 Principe de conservation de la masse en mécanique classique

1.3.1 SYSTEME MATERIEL FERME

La masse d'un système matériel fermé est constante au cours du temps .

$$\boxed{\frac{d[m(E(t))]}{dt} = 0 \Rightarrow m(E(t)) = m(E) = C^{te}}$$

1.3.2 CONSEQUENCE

Soit E(t) un système matériel en mouvement par rapport à un repère R .

Si $\vec{\varphi}[P(t)]$ est une fonction vectorielle continûment dérivable par rapport à t, définie pour tout point P de E(t), on démontre que:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\int_{E(t)} \vec{\varphi}[P(t)]\, dm\right]_R = \int_{E(t)} \left[\frac{d}{dt}\vec{\varphi}[P(t)]\right]_R dm \qquad (2)}$$

2 CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTEME MATERIEL

2.1 Définition

Soit E(t) la configuration, à l'instant t, du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R.

Le centre d'inertie du système matériel E, noté G, est donné par la relation :

$$\boxed{\int_{E(t)} \vec{GP}\,dm = \vec{0} \qquad (3)}$$

2.2 Détermination directe de G

2.2.1 Existence de G

Posons $\vec{GP} = \vec{AP} - \vec{AG}$ où A désigne un point quelconque, d'après (3) on a :

$$\int_{E(t)} \vec{AP}\,dm = \int_{E(t)} \vec{AG}\,dm$$

or $\vec{GP} = \vec{AP} - \vec{AG}$ est indépendant de m et t, donc :

$$\int_{E(t)} \vec{AP}\,dm = \vec{AG} \int_{E(t)} dm$$

soit

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\,dm \qquad (4)}$$

2.2.2 Unicite de G

Soient G_1 et G_2 deux points vérifiant la relation (4)

$$\vec{AG_1} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\,dm$$

$$\vec{AG_1} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\,dm$$

d'où

$$\vec{AG_1} - \vec{AG_2} = \vec{0}$$

donc

$$\boxed{G_1 \equiv G_2 \equiv G}$$

2.3 Détermination pratique du centre d'inertie d'un système matériel E

2.3.1 Le systeme materiel E est constitue de n solides S_i

On a donc

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

et

$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(S_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

si G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i
si m_i désigne la masse du solide S_i
D'après (4)

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\, dm$$

D'après (1)

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{S_i} \vec{AP}\, dm \right]}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

donc

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{AG_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (5)}$$

G est donc le barycentre de tous les points G_i affectés des masses m_i

2.3.2 LE SYSTEME MATERIEL E EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

2.3.2.1 Définition

D'après (4)

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{m(S)} \int_{S(t)} \vec{AP}\, dm}$$

Si on pose $\qquad R = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

on a $\qquad \vec{AG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$

et $\qquad AP = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

il vient:

$$\boxed{x_G = \frac{\int_{E(t)} x\,dm}{m} \qquad y_G = \frac{\int_{E(t)} y\,dm}{m} \qquad z_G = \frac{\int_{E(t)} z\,dm}{m} \qquad (6)}$$

2.3.2.2 Symétrie matérielle du solide S

La détermination pratique su centre d'inertie d'un solide S passe par la prise en compte des symétries matérielles du solide S.

Si xAy est plan de symétrie du solide S, alors :

$$z_G = \frac{\int_{E(t)} z\,dm}{m} = 0$$

Si xAz est plan de symétrie du solide S, alors :

$$y_G = \frac{\int_{E(t)} y\,dm}{m} = 0$$

Si yAz est plan de symétrie du solide S, alors :

$$x_G = \frac{\int_{E(t)} x\,dm}{m} = 0$$

Si (A,z) est axe de symétrie de révolution, alors :

$$x_G = \frac{\int_{E(t)} x\,dm}{m} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_{E(t)} y\,dm}{m} = 0$$

3 TORSEUR CINETIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL E EN MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPERE *R*

3.1 Définition

On appelle torseur cinétique, au point A, du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*, le torseur noté $\{C(E/R)\}_A$ défini par :

$$\{C(E/R)\} = \begin{cases} \vec{R}_C(E/R) = \vec{P}(E/R) = \displaystyle\int_{E(t)} \vec{V}(P/R)dm \\ \vec{\sigma}(A, E/R) = \displaystyle\int_{E(t)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm \end{cases} \qquad (8)$$

le vecteur $\vec{P}(E/R)$ est la résultante cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*.

le vecteur $\vec{\sigma}(A, E/R)$ est le moment cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*.

Vérifions que $\{C(E/R)\}$ *est bien un torseur*.

Calculons $\vec{\sigma}(B, E/R)$, B étant un point quelconque.

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \int_{P \in E(t)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \int_{P \in E(t)} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}(P/R)dm + \int_{P \in E(t)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P \in E(t)} \vec{V}(P/R)dm + \vec{\sigma}(A, E/R)$$

d'après (6)

soit

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \vec{\sigma}(A, E/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}(E/R) \qquad (9)$$

$\{C(E/R)\}$ *est donc bien un torseur.*

3.2 Calcul de la résultante cinétique $\vec{P}(E/R)$

3.2.1 CALCUL DIRECT DE $\vec{P}(E/R)$

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R)dm$$

si O est un point fixe dans R,

$$\vec{P}(E/R) = \int_E \left[\frac{d\,\vec{OP}}{dt}\right]_R dm$$

d'après (2),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt}\left[\int_E \vec{OP}dm\right]_R$$

d'après (4),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt}\left[m\,\vec{OG}\right]_R$$

d'après (2),

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = m\vec{V}(G/R) \qquad (10)}$$

où m désigne la masse du système matériel E
G désigne le centre d'inertie du système matériel E.

3.2.2 CALCUL PRATIQUE DE $\vec{P}(E/R)$

3.2.2.1 Le système matériel est constitué d'un seul solide S

$$\boxed{\vec{P}(S/R) = m\vec{V}(G/R) \qquad (11)}$$

où m désigne la masse du solide S
G désigne le centre d'inertie du solide S

3.2.2.2 Le système matériel est constitué de n solides S_i

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R)dm$$

d'où

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{S_i} \vec{V}(P/R)dm\right]$$

donc

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}(S_i/R)$$

soit

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}(G_i/R) \qquad (12)}$$

où m_i désigne la masse du solide S_i
G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i

Remarque: Le vecteur $\vec{P}(E/R)$ *est aussi appelé vecteur quantité de mouvement du système matériel E en mouvement par rapport au repère R.*

3.3 Calcul du moment cinétique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R

3.3.1 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE DE N SOLIDES S_i

$$\vec{\sigma}(A,E/R) = \int_{E(t)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

d'après (1)

$$\vec{\sigma}(A,E/R) = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{S_i} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm\right]$$

soit

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,E/R) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\sigma}(A,S_i/R) \qquad (13)}$$

où

$\vec{\sigma}(A,S_i/R)$ désigne le moment cinétique, au point A, du solide S_i dans son mouvement par rapport à R.

3.3.2 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

3.3.2.1 Calcul direct de $\vec{\sigma}(A,S/R)$

Ce calcul s'effectue en tenant compte des points suivants :
A désigne le point quelconque où est calculé $\vec{\sigma}(A,S/R)$*. A peut être fixe ou mobile dans R..*
B désigne un point particulier de S et P désigne un point courant de S.

$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$ $\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \left[\vec{V}(B,S/R) + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R)\right]dm$ B et P appartenant à S

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(B,S/R)dm + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \left[\overrightarrow{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R)\right]dm$$

or $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$
donc :

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP}\,dm \wedge \vec{V}(B,S/R) + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \left[\overrightarrow{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R)\right]dm$$

$$+ \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \left[\overrightarrow{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R)\right]dm$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\sigma}(A,S/R) &= m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(B/R) + m\,\overrightarrow{AB} \wedge \left[\overrightarrow{GB} \wedge \vec{\Omega}(S/R)\right] \\ &+ \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{BP}\right]dm \end{aligned} \qquad (14)}$$

Remarque: Bien que la relation (14) donne l'expression du vecteur $\vec{\sigma}(A,S/R)$, *ce dernier n'est jamais calculé par la relation (14). Dans la pratique, on calcule* $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *grâce aux trois cas particuliers détaillés ci dessous.*

3.3.2.2 **Calcul pratique de** $\vec{\sigma}(A,S/R)$

- *Si B est confondu avec A*

Le point de calcul A de $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *est le point B où est connu l'opérateur d'inertie* $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit :*

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,S/R) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A/R) + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}\right] dm \qquad (15)}$$

- ***Si B est confondu avec A fixe dans R***

Le point de calcul A de $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *est fixe dans R et est, de plus, le point B où est connu l'opérateur d'inertie* $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit :*

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}\right] dm \qquad (16)}$$

- ***Si B est confondu avec G centre d'inertie de S***

Le centre d'inertie G est le point B où est connu l'opérateur d'inertie $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit :*

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\sigma}(A,S/R) = \vec{\sigma}(G,S/R) + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/R) \\ &\vec{\sigma}(G,S/R) = \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{GP}\right] dm \end{aligned} \qquad (17)}$$

3.4 Matrice d'inertie du solide S, en un point A, exprimé dans un repère R_s lié à S

3.4.1 DEFINITION

Les expressions (15), (16) et (17) montrent l'existence de l'opérateur d'inertie du solide S, au point B, appliqué au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$.

$$\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R)) = \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{BP}\right] dm$$

Si on pose :

$R_S = (B, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ repère lié à S et,

$B_S = (\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ base associée à R_S.

On peut écrire :

$$\vec{\Omega}(S/R) = p\vec{x}_S + q\vec{y}_S + r\vec{z}_S$$

$$\overrightarrow{BP} = x\vec{x}_S + y\vec{y}_S + z\vec{z}_S$$

Calculons $\left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{BP}\right] = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qz - ry \\ -pz + rx \\ py - qx \end{vmatrix}$

et $\overrightarrow{BP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{BP}\right] = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} qz - ry \\ -pz + rx \\ py - qx \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} p(y^2 + z^2) - qxy - rxz \\ -pxy + q(x^2 + z^2) + ryz \\ -pxz - qyz + r(x^2 + y^2) \end{bmatrix}_{B_S}$

Si on pose:

$$A = \int_S (y^2 + z^2)dm \qquad D = \int_S yzdm$$
$$B = \int_S (x^2 + z^2)dm \qquad E = \int_S xzdm \quad (18)$$
$$C = \int_S (x^2 + y^2)dm \qquad F = \int_S xydm$$

avec

A moment d'inertie du solide S, au point B, par rapport à l'axe $(B, \vec{x}_S)$.
B moment d'inertie du solide S, au point B, par rapport à l'axe $(B, \vec{y}_S)$.
C moment d'inertie du solide S, au point B, par rapport à l'axe $(B, \vec{z}_S)$.
D produit d'inertie du solide S, au point B, par rapport aux axes $(B, \vec{y}_S)$ et $(B, \vec{z}_S)$
E produit d'inertie du solide S, au point B, par rapport aux axes $(B, \vec{x}_S)$ et $(B, \vec{z}_S)$
F produit d'inertie du solide S, au point B, par rapport aux axes $(B, \vec{x}_S)$ et $(B, \vec{y}_S)$

On peut donc écrire :

$$\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))_{B_S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{B_S} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{B_S}$$

soit

$$\boxed{\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))_{B_S} = [I(B,S)]_{B_S} [\vec{\Omega}(S/R)]_{B_S} \qquad (19)}$$

où
$[I(B,S)]_{B_S}$ désigne la matrice d'inertie, au point B, du solide S exprimée dans la base B_S
$[\vec{\Omega}(S/R)]_{B_S}$ désigne le vecteur rotation instantanée du solide S exprimée dans la base B_S.
$\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))_{B_S}$ désigne l'opérateur d'inertie du solide S, au point B, appliqué au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$, exprimé dans la base B_S.

3.4.2 FORME SIMPLIFIEE DE LA MATRICE D'INERTIE $[I(B,S)]_{R_S}$

3.4.2.1 Symétrie matérielle du solide S

La détermination pratique de la matrice d'inertie du solide S passe par la prise en compte des symétries matérielles du solide S.

- *Si x_sBy_s est plan de symétrie de S*

$$\int_S yzdm = 0 \Rightarrow D = 0 \qquad \int_S xzdm = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\boxed{[I(B,S)]_{B_S} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_S}}$$

- *x_sBz_s est plan de symétrie de S*

$$\int_S xydm = 0 \Rightarrow F = 0 \qquad \int_S yzdm = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\boxed{[I(B,S)]_{B_S} = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{B_S}}$$

- *y_sBz_s est plan de symétrie de S*

$$\int_S xydm = 0 \Rightarrow F = 0 \qquad \int_S xzdm = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\boxed{[I(B,S)]_{B_S} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{B_S}}$$

- *(B,z_S) est axe de symétrie de révolution*

<u>Propriété n°1</u>

$$\int_S yzdm = 0 \Rightarrow D = 0$$
$$\int_S xzdm = 0 \Rightarrow E = 0$$
$$\int_S xydm = 0 \Rightarrow F = 0$$
$$\int_S x^2dm = \int_S y^2dm \Rightarrow A = B$$

soit

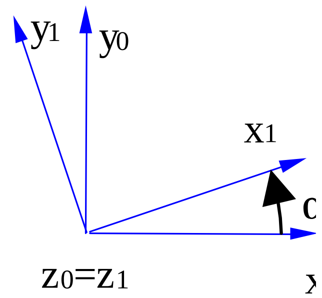
$$\boxed{[I(B,S)]_{B_S} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_S}}$$

Propriété n° 2

Soient $R_S = (B, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ et $R = (B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ deux repères liés à S tels que R se déduit de R_S par une rotation d'axe (B, z_S).

Démontrons que :

$$\boxed{[I(B,S)]_{B_S} = [I(B,S)]_R}$$



Appelons $[P]$ la matrice de passage de B dans B_S

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I(B,S)]_B = [P]^{-1}[I(B,S)]_{B_S}[P]$$

$$[I(B,S)]_B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{B_S} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I(B,S)]_B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\cos\alpha & A\sin\alpha & 0 \\ A\sin\alpha & A\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

$$[I(B,S)]_B = \begin{bmatrix} A(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & A(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

soit

$$\boxed{[I(B,S)]_B = [I(B,S)]_{B_S}}$$

3.5 Théorème de Huyghens

3.5.1 OBJECTIF

Soit G le centre d'inertie du solide et soit A un point quelconque du solide S.

Le théorème de Huyghens permet de :

déterminer l'opérateur d'inertie du solide S, au point A, appliqué au vecteur unitaire $\vec{u}$, noté $\vec{J}[(A,\vec{u})]_{B_S} = [I(A,S)]_{B_S}[\vec{u}]_{B_S}$

connaissant l'opérateur d'inertie du solide S, au point G, appliqué au vecteur unitaire $\vec{u}$, noté $\vec{J}[(G,\vec{u})]_{B_S} = [I(G,S)]_{B_S}[\vec{u}]_{B_S}$

3.5.2 ENONCE

$$\boxed{\vec{J}[(A,\vec{u})]_{B_S} = \vec{J}[(G,\vec{u})]_{B_S} + m\,\vec{AG} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AG}\right] \qquad (20)}$$

soit

$$\begin{array}{|ll|} A_A = A_G + m(b^2+c^2) & D_A = D_G + mbc \\ B_A = B_G + m(a^2+c^2) & E_A = E_G + mac \; (21) \\ C_A = C_G + m(a^2+b^2) & F_A = F_G + mab \end{array}$$

avec m masse du solide S

et $\vec{GA} = a\vec{x}_S + b\vec{y}_S + c\vec{z}_S$

3.5.3 DEMONSTRATIONS

3.5.3.1 Méthode directe

Soit P un point courant du solide S, on a $\vec{AP} = \vec{AG} + \vec{GP}$

$$\vec{J}(A,\vec{u}) = \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{AP}\right] dm$$

$$\vec{J}(A,\vec{u}) = \int_S \vec{AG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{AG}\right] dm + \int_S \vec{GP} \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{AG}\right] dm + \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{AP}\right] dm + \int_S \vec{AG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{GP}\right] dm$$

$$\vec{J}(A,\vec{u}) = \vec{AG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{AG}\right] \int_S dm + \int_S \vec{GP}\,dm \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{AG}\right] + \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{AP}\right] dm + \vec{AG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \int_S \vec{GP}\,dm\right]$$

or

$$\int_S \vec{GP}\,dm = \vec{0}$$

donc

$$\boxed{\vec{J}[(A,\vec{u})]_{R_S} = \vec{J}[(G,\vec{u})]_{R_S} + m\,\vec{AG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \vec{AG}\right]}$$

Appliquons l'équation (20) à $\vec{x}_S$ dans la base $(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$

$$\vec{J}[(A,\vec{x}_S)] = \vec{J}[(G,\vec{x}_S)] + m\left[\overrightarrow{AG} \wedge \left[\vec{x}_S \wedge \overrightarrow{AG}\right]\right]$$

d'après (19) il vient :

$$\begin{vmatrix} A_A \\ -F_A \\ -E_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_G \\ -F_G \\ -E_G \end{vmatrix} + m\left[\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge \left[\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}\right]\right] = \begin{vmatrix} A_G \\ -F_G \\ -E_G \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} b^2 + c^2 \\ -ab \\ -ac \end{vmatrix}$$

soit

$$\boxed{\begin{array}{lllll} A_A & = & A_G & + & m(b^2 + c^2) \\ F_A & = & F_G & + & mab \\ E_A & = & E_G & + & mac \end{array}}$$

Procédant de même avec :

$$\vec{J}[(A,\vec{y}_S)] = \vec{J}[(G,\vec{y}_S)] + m\left[\overrightarrow{AG} \wedge \left[\vec{y}_S \wedge \overrightarrow{AG}\right]\right]$$

on obtient:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} B_A & = & B_G & + & m(a^2 + b^2) \\ F_A & = & F_G & + & mab \\ D_A & = & D_G & + & mbc \end{array}}$$

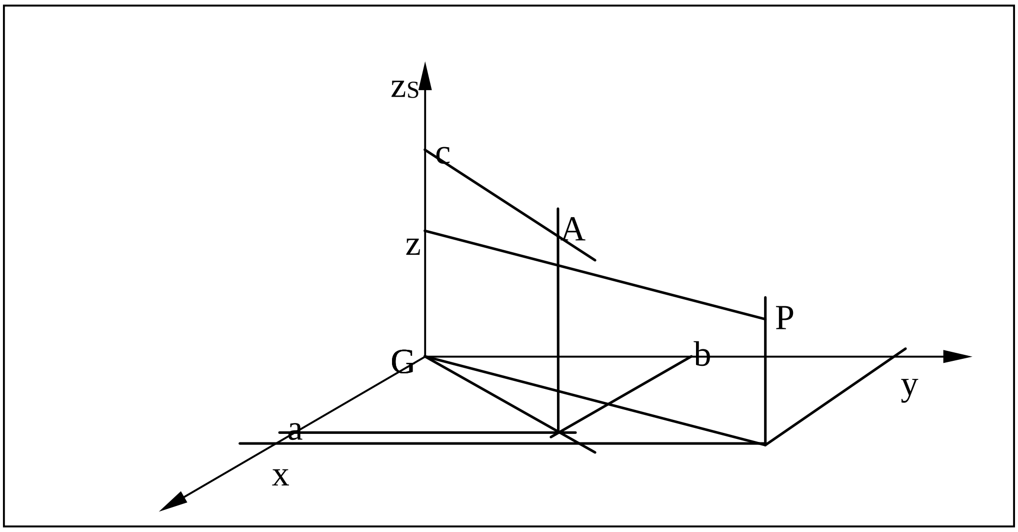
Procédant de même avec :

$$\vec{J}[(A,\vec{z}_S)] = \vec{J}[(G,\vec{z}_S)] + m\left[\overrightarrow{AG} \wedge \left[\vec{z}_S \wedge \overrightarrow{AG}\right]\right]$$

on obtient:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} C_A & = & C_G & + & m(b^2 + c^2) \\ E_A & = & E_G & + & mac \\ D_A & = & D_G & + & mbc \end{array}}$$

3.5.3.2 Méthode pratique.



Par définition:

$$A_A = \int_S \left((\vec{AP}.\vec{y})^2 + (\vec{AP}.\vec{z})^2 \right) dm$$

soit

$$A_A = \int_S \left[(y-b)^2 + (z-c)^2 \right] dm$$

$$A_A = \int_S \left(y^2 + z^2 \right) dm - 2b \int_S ydm - 2c \int_S zdm + m(b^2 + c^2)$$

or

$$\int_S ydm = my_G = 0$$

$$\int_S zdm = mz_G = 0$$

donc

$$\boxed{A_A = A_G + m(b^2 + c^2)}$$

Par permutation circulaire, on trouve alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} B_A = B_G + m(a^2 + c^2) \\ C_A = C_G + m(a^2 + b^2) \end{array}}$$

On procède de même pour le calcul de D_A, E_A, F_A.

$$F_A = \int_S (\vec{AP}.\vec{x})(\vec{AP}.\vec{y}) dm$$

$$F_A = \int_S \left[(y-b)(x-a) \right] dm$$

$$F_A = \int_S xydm - a\int_S ydm - b\int_S xdm + mab$$

or

$$\int_S xdm = mx_G = 0$$
$$\int_S ydm = my_G = 0$$

donc

$$\boxed{F_A = F_G + mab}$$

Par permutation circulaire, on trouve alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} D_A = D_G + mbc \\ E_A = E_G + mac \end{array}}$$

3.6 Moments d'inertie particuliers

3.6.1 Moment d'inertie d'un solide S, à l'instant t, par rapport à un axe noté $I(A,\vec{u})$

3.6.1.1 Définition

Soit P un point courant de S et H la projection orthogonale de P la droite $(A,\vec{u})$.
Le moment d'inertie du solide S, à l'instant t, par rapport à l'axe $(A,\vec{u})$ noté $I(A,\vec{u})$ est :

$$\boxed{I(A,\vec{u}) = \int_S PH^2 dm}$$

3.6.1.2 Calcul pratique de $I(A,\vec{u})$

$$I(A,\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{PH}^2 dm = \int_S \overrightarrow{AP}^2 \sin^2\alpha dm$$

$$I(A,\vec{u}) = \int_S (\overrightarrow{AP}^2 - (\overrightarrow{AP}^2 \cos^2\alpha)\, dm = \int_S \left[\overrightarrow{AP}^2 - (\overrightarrow{AP}.\vec{u}) \right] dm$$

$$I(A,\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AP}.\left[\overrightarrow{AP} - \vec{u}.(\overrightarrow{AP}.\vec{u}) \right] dm$$

$$I(A,\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AP}.\left[(\vec{u}.\vec{u})\,\overrightarrow{AP} - (\vec{u}.\overrightarrow{AP}).\vec{u} \right] dm$$

$$I(A,\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AP}.\left[\vec{u} \wedge (\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}) \right] dm = \vec{u}.\int_S \overrightarrow{AP}.\left[\overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}) \right] dm$$

$I(A,\vec{u}) = \vec{u}.\vec{J}(A,\vec{u})$ donc :

$$\boxed{I(A,\vec{u}) = {}^t[\vec{u}]_B [I(A,S)]_B [\vec{u}]_B \qquad (22)}$$

où

${}^t[\vec{u}]_B$	désigne le vecteurniligne $\vec{u}$ exprimé dans la base B
$[\vec{u}]_B$	désigne le vecteur unicolonne $\vec{u}$ exprimé dans la base B
$[I(A,S)]_B$	désigne la matrice d'inertie du solide S, au point A, exprimée dans la base B.

3.6.2 MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE S PAR RAPPORT A UN POINT O

Le moment d'inertie du solide S, à l'instant t, par rapport au point O noté I_O est:

$$\boxed{I_O = \int_S \overrightarrow{PO}^2 \, dm}$$

soit

$$\boxed{I_O = \int_S [x^2 + y^2 + z^2] dm = \frac{1}{2}(A + B + C)}$$

3.6.3 MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE S PAR RAPPORT A UN PLAN

Le moment d'inertie du solide S, à l'instant t, par rapport au plan xOy est :

$$\boxed{I_{Oyz} = \int_S z^2 dm = \frac{1}{2}(A + B - C)}$$

Le moment d'inertie du solide S, à l'instant t, par rapport au plan yOz est :

$$\boxed{I_{Oyz} = \int_S x^2 dm = \frac{1}{2}(-A + B + C)}$$

Le moment d'inertie du solide S, à l'instant t, par rapport au plan xOz est :

$$\boxed{I_{Oxz} = \int_S y^2 dm = \frac{1}{2}(A - B + C)}$$

4 ENERGIE CINETIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL E, EN MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPERE R

4.1 Définition

L'énergie cinétique du système matériel E, en mouvement relativement au repère R, notée $T(E/R)$ est:

$$\boxed{T(E/R)=\int_E \frac{1}{2}\vec{V}^2(P/R)\,dm \qquad (23)}$$

Remarques:

- $T(E/R)$ est un scalaire.
- Unité SI: Joule

4.2 Calcul de l'énergie cinétique du système matériel E, en mouvement relativement au repère R

4.2.1 Le systeme materiel E est constitue de n solides S_i

On a donc $E=\bigcup_{i=1}^{n} S_i$

d'après (1)

$$T(E/R)=\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\frac{1}{2}\vec{V}^2(P/R)dm$$

donc

$$\boxed{T(E/R)=\sum_{i=1}^{n}T(S_i/R) \qquad (24)}$$

4.2.2 Le systeme materiel E est constitue d'un seul solide S

4.2.2.1 Calcul direct de $T(S/R)$

Par définition,

$$T(S/R)=\int_S \frac{1}{2}\vec{V}^2(P/R)dm$$

Si B est un point quelconque de S, on peut écrire :

$$2T(S/R)=\int_S\left[\vec{V}(B,S/R)+\vec{PB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]^2 dm$$

$$2T(S/R) = \int_S \vec{V}^2(B,S/R)dm + 2\int_S \vec{V}(B,S/R).\left[\vec{PB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]dm + \int_S\left[\vec{PB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]^2 dm$$

$$2T(S/R) = m\vec{V}^2(B,S/R) + 2m\vec{V}(B,S/R).\left[\overrightarrow{GB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right] + \vec{\Omega}(S/R).\vec{J}\left[B,\vec{\Omega}(S/R)\right]$$

Soit finalement,

$$\boxed{T(S/R) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(B,S/R) + m\vec{V}(B,S/R).\left[\overrightarrow{GB}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right] + \frac{1}{2}{}^t\left[\vec{\Omega}(S/R)\right]_R\left[I(B,S)\right]_R\left[\vec{\Omega}(S/R)\right]_R} \quad (25)$$

4.2.2.2 Calcul pratique de $T(S/R)$

- ***S possède un point fixe A dans son mouvement par rapport à R***

$$\underline{B \equiv A}$$

$$\boxed{T(S/R) = \frac{1}{2}{}^t\left[\vec{\Omega}(S/R)\right]_R\left[I(A,S)\right]_R\left[\vec{\Omega}(S/R)\right]_R} \quad (26)$$

- ***S ne possède pas de point fixe dans son mouvement par rapport à R***

$$\underline{B \equiv G}$$

$$\boxed{T(S/R) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(B,S/R) + \frac{1}{2}{}^t\left[\vec{\Omega}(S/R)\right]_R\left[I(B,S)\right]_R\left[\vec{\Omega}(S/R)\right]_R} \quad (27)$$

ou encore

$$\boxed{T(S/R) = \frac{1}{2}\left\{V(S/R)\right\}_G \otimes \left\{C(S/R)\right\}_G} \quad (28)$$

avec

$$\left\{V(S/R)\right\}_G = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(G,S/R)\end{matrix}\right\}_G$$

et

$$\left\{C(S/R)\right\}_G = \left\{\begin{matrix}\vec{P}(S/R) = m\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}(G,S/R) = \left[I(G,S)\right]_R\left[\vec{\Omega}(S/R)\right]\end{matrix}\right\}_G$$

continuer ici

5 TORSEUR DYNAMIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL E EN MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPERE R

5.1 Définition

On appelle torseur dynamique, au point A, du système matériel E en mouvement par rapport au repère *R*, le torseur noté $\{D(E/R)\}_A$ tel que:

$$\boxed{\{D(E/R)\}_A = \begin{cases} \vec{R}_d(E/R) = \displaystyle\int_{E(t)} \vec{\Gamma}(P/R)dm \\ \vec{\delta}(A,E/R) = \displaystyle\int_{E(t)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm \end{cases}}$$

le vecteur $\vec{R}_d(E/R)$ ***est la résultante dynamique*** du système matériel E en mouvement par rapport au repère *R.*

le vecteur $\vec{\delta}(A,E/R)$ ***est le moment dynamique*** du système matériel E en mouvement par rapport au repère *R.*

Démontrons que $\{D(E/R)\}_A$ *est bien un torseur.*

Calculons $\vec{\delta}(B,E/R)$, B étant un point quelconque.

$$\vec{\delta}(B,E/R) = \int_E \overrightarrow{BP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm$$

$$\vec{\delta}(B,E/R) = \int_E \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm + \int_E \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)dm$$

$$\vec{\delta}(B,E/R) = \left[\overrightarrow{BA} \wedge \int_E \vec{\Gamma}(P/R)dm\right] + \vec{\delta}(A,E/R)$$

soit

$$\boxed{\vec{\delta}(B,E/R) = \vec{\delta}(A,E/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_d(E/R)}$$

$\{D(E/R)\}_A$ *est donc bien un torseur.*

5.2 Calcul de la résultante dynamique $\vec{R}_d(E/R)$

5.2.1 CALCUL DIRECT DE $\vec{R}_d(E/R)$

Par définition,

$$\vec{R}_d(E/R) = \int_{E(t)} \vec{\Gamma}(P/R)dm$$

si O est un point fixe dans R

$$\vec{R}_d(E/R) = \int_E \left[\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right]_R dm$$

donc

$$\vec{R}_d(E/R) = \left[\frac{d^2}{dt^2}\left[\int \overrightarrow{OP}\,dm\right]\right]_R$$

et

$$\vec{R}_d(E/R) = \frac{d^2}{dt^2}\left[m\,\overrightarrow{OG}\right]_R$$

soit

$$\boxed{\vec{R}_d(E/R) = m\vec{\Gamma}(G/R)}$$

où m désigne la masse du système matériel E
G désigne le centre d'inertie du système matériel E.

5.2.2 CALCUL PRATIQUE DE $\vec{R}_d(E/R)$

5.2.2.1 Le système matériel est constitué d'un seul solide S

$$\boxed{\vec{R}_d(S/R) = m\vec{\Gamma}(G/R)}$$

5.2.2.2 Le système matériel est constitué de n solides S_i

Par définition,

$$\vec{R}_d(E/R) = \int_E \vec{\Gamma}(P/R)dm$$

d'où

$$\vec{R}_d(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{S_i} \vec{\Gamma}(P/R)dm\right]$$

donc

$$\vec{R}_d(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_d(S_i/R)$$

soit

$$\boxed{\vec{R}_d(E/R)=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\Gamma}(G_i/R)}$$

où m_i désigne la masse du solide S_i
G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i

5.3 Calcul du moment dynamique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R

5.3.1 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE DE N SOLIDES S_i

Par définition,

$$\vec{\delta}(A,E/R)=\int_E \overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P/R)dm$$

donc

$$\vec{\delta}(A,E/R)=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{S_i}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P/R)dm\right]$$

soit

$$\boxed{\vec{\delta}(A,E/R)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\delta}(A,S_i/R)}$$

où $\vec{\delta}(A,S_i/R)$ désigne le moment dynamique, au point A, du solide S_i dans son mouvement par rapport à R.

5.3.2 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

5.3.2.1 Calcul direct de $\vec{\delta}(A,S/R)$

Si P désigne un point courant de S et A désigne le point quelconque où est calculé $\vec{\delta}(A,S/R)$.

Par définition,

$$\vec{\delta}(A,S/R)=\int_S \overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P/R)dm$$

donc

$$\vec{\delta}(A,S/R)=\int_S \overrightarrow{AP}\wedge\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(P/R)\right]_R dm$$

d'où

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \int_S \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\right]_R dm - \int_E \left[\frac{d\,\overrightarrow{AP}}{dt}\right]_R \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

et

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\int_S \left[\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R\right]_R dm - \int_S \left[\vec{V}(P/R) - \vec{V}(A/R)\right] \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

donc

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R + \vec{V}(A/R) \wedge \int_S \vec{V}(P/R)dm$$

soit

$$\boxed{\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R + m\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)}$$

5.3.2.2 Calcul pratique de $\vec{\delta}(A,S/R)$

- ***S possède un point fixe A dans son mouvement par rapport à R***

$$\boxed{\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R}$$

- ***S ne possède pas de point fixe dans son mouvement par rapport à R***

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\delta}(G,S/R) = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G,S/R)\right]_R \\ \vec{\delta}(A,S/R) = \vec{\delta}(G,S/R) + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\Gamma}(G/R) \end{array}}$$